

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

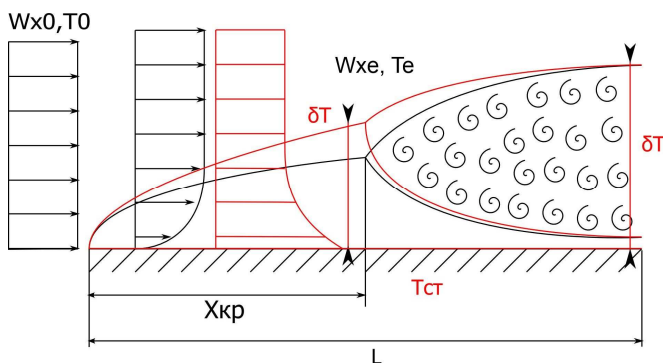
Лекция №5, 6

План лекции:

1. Интегральные соотношения теории пограничного слоя
2. Характер движения жидкости вдоль поверхности
3. Теплоотдача при ламинарном режиме течения в пограничном слое
4. Теплоотдача при турбулентном режиме течения в пограничном слое

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

На предыдущих лекциях мы получили дифференциальные уравнения динамического и теплового пограничных слоёв в приближении двумерного течения вдоль плоской поверхности как при ламинарном (1), так и при турбулентном режиме течения.



$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0$$
$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} - \frac{dP}{dx} \quad (1)$$
$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$
$$P(y) = \text{const}$$

Полученные дифференциальные уравнения пограничного слоя проще соответствующих полных дифференциальных уравнений Навье - Стокса. Тем не менее, аналитические решения данной системы уравнений существуют только для нескольких частных случаев, таких как **течение вдоль проницаемой пластины с отсосом газа из пограничного слоя, течение в гладкой трубе** и ряд других. Разработаны надёжные и экономичные методы численного интегрирования данной системы уравнений, позволяющие получить решения для широкого круга задач и граничных условий. Однако моделирование турбулентности в рамках теории пограничного слоя требует привлечения дополнительной, часто эмпирической информации. Исторически так сложилось, что обработку экспериментальных данных принято вести с использованием, так называемых, **интегральных соотношений**. Многие характеристики пограничного слоя, следующие из интегральных соотношений стали основой для разработки универсальных моделей турбулентности, например модели Себиси-Смита. Кроме того интегральные соотношения позволяют выявить внутренние масштабы течения в пограничном слое, не зависящие от геометрических размеров и формы обтекаемых поверхностей, что так же делает эти соотношения полезными при построении моделей турбулентности.

Рассмотрим основы интегральной теории пограничного слоя на примере решения задач теплоотдачи от плоской пластины в поток жидкости или газа. Получим интегральные уравнения движения для течения на плоской непроницаемой пластине. Исходные уравнения (1) можно записать в виде:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \rho w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{dp}{dx} = \rho w_{xe} \frac{dw_{xe}}{dx} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

Помножим уравнение неразрывности на скорость потока вдоль пластины w_x , и суммируем это уравнение с уравнением движения. Получим:

$$\frac{\partial \rho w_x^2}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_x w_y)}{\partial y} - \rho w_{xe} \frac{dw_{xe}}{dx} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (3)$$

Помножим уравнение неразрывности на расход газа на внешней границе пограничного слоя ρw_{xe} , и вычтем из уравнения неразрывности уравнение (3), учитывая, что ρw_{xe} зависит от x и не зависит от y :

$$\frac{\partial (\rho w_{xe} w_x)}{\partial x} - \frac{\partial \rho w_x^2}{\partial x} + \frac{\partial (\rho w_{xe} w_y)}{\partial y} - \frac{\partial (\rho w_x w_y)}{\partial y} + \rho w_{xe} \frac{dw_{xe}}{dx} - \rho w_x \frac{dw_{xe}}{dx} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x (w_{xe} - w_x)) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y (w_{xe} - w_x)) + \rho (w_{xe} - w_x) \frac{dw_{xe}}{dx} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$$

Проинтегрируем каждый член преобразованного уравнения поперёк пограничного слоя:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\rho w_x (w_{xe} - w_x)) dy + \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\rho w_y (w_{xe} - w_x)) dy + \int_0^{\infty} \rho (w_{xe} - w_x) \frac{dw_{xe}}{dx} dy = -\int_0^{\infty} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \quad (5)$$

Заменяя порядок интегрирования и дифференцирования и вынося комплекс ρw_{xe}^2 с учётом зависимости скорости на внешней границе от x , получим:

$$\frac{d}{dx} \rho w_{xe}^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{w_x}{w_{xe}} \left(1 - \frac{w_x}{w_{xe}} \right) \right) dy + \rho w_y (w_{xe} - w_x) \Big|_0^{\infty} + \rho w_{xe} \frac{dw_{xe}}{dx} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{w_x}{w_{xe}} \right) dy = -\tau_{xy} \Big|_0^{\infty} \quad (6)$$

На внешней границе пограничного слоя $w_x = w_{x0}, \tau_{xy} = 0$

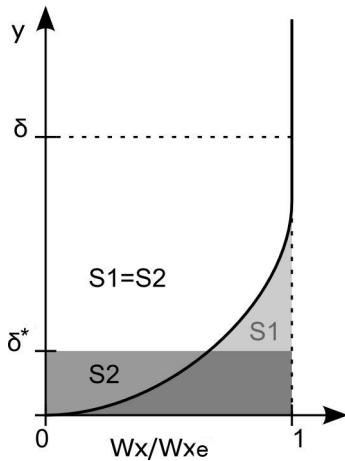
На непроницаемой стенке $w_x = w_y = 0, \tau_{xy} = (\tau_{xy})_{ст}$

С учётом этого интегральное уравнение движения примет вид:

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\int_0^{\infty} \left(\frac{w_x}{w_{x0}} \left(1 - \frac{w_x}{w_{x0}} \right) \right) dy}_{\delta^{**}} + \left(2 \underbrace{\int_0^{\infty} \left(\frac{w_x}{w_{x0}} \left(1 - \frac{w_x}{w_{x0}} \right) \right) dy}_{\delta^{**}} + \underbrace{\int_0^{\infty} \left(1 - \frac{w_x}{w_{xe}} \right) dy}_{\delta^*} \right) \frac{1}{w_{xe}} \frac{dw_{xe}}{dx} = \frac{(\tau_{xy})_{ст}}{\rho w_{xe}^2} \quad (7)$$

или

$$\boxed{\frac{d\delta^{**}}{dx} + (2\delta^{**} + \delta^*) \frac{1}{w_{xe}} \frac{dw_{xe}}{dx} = \frac{(\tau_{xy})_{ст}}{\rho w_{xe}^2}} \quad (8)$$



Величина $\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{w_x}{w_{xe}}\right) dy$ носит название **толщины вытеснения** и определяется как **толщина пристенного слоя, через которую при течении идеальной жидкости прошло бы количество вещества, равное потери количества вещества в сечении пограничного слоя за счёт тормозящего действия сил трения.**

Толщина вытеснения δ^* является важной расчетной характеристикой пограничного слоя и широко используется в теории пограничного слоя наряду с δ - обычной толщиной пограничного слоя.

Толщина вытеснения δ^* является важной расчетной характеристикой пограничного слоя и широко используется в теории пограничного слоя наряду с δ - обычной толщиной пограничного слоя.

По аналогии величина $\delta^{**} = \int_0^{\infty} \left(\frac{w_x}{w_{x0}} \left(1 - \frac{w_x}{w_{x0}}\right)\right) dy$ носит название **толщины потери импульса** и определяется как **толщина пристенного слоя, через которую при течении идеальной жидкости прошло бы количество движения, равное потери количества движения в сечении пограничного слоя за счёт тормозящего действия сил трения.**

Толщина потери импульса δ^{**} также является важной расчетной характеристикой пограничного слоя. Отношение $H = \delta^*/\delta^{**}$ носит название **формпараметра** и играет ключевую роль при анализе градиентных течений.

Толщина потери импульса δ^{**} также является важной расчетной характеристикой пограничного слоя. Отношение $H = \delta^*/\delta^{**}$ носит название **формпараметра** и играет ключевую роль при анализе градиентных течений.

Интегральные параметры пограничного слоя обладают тем замечательным свойством, что увеличение верхнего предела интегрирования $y > \delta$ практически не изменяет их значения. При экспериментальном определении с достаточно аккуратными измерениями она практически не чувствительна к дальнейшему увеличению точности приборов, в то время как значение толщины пограничного слоя δ прямо связано с выбором значения $\epsilon = \frac{w_x - w_{xe}}{w_{xe}}$.

С использованием определения толщины потери импульса интегральное уравнение движения можно записать следующим образом:

$$\frac{c_f}{2} = \frac{d\delta^{**}}{dx} + \delta^{**} (2 + H) \frac{1}{w_{xe}} \frac{dw_{xe}}{dx} \quad (9)$$

Аналогичным образом можно получить и интегральное уравнение энергии в виде:

$$St = \frac{d\delta_T^{**}}{dx} + \delta_T^{**} \left(\frac{1}{w_{xe}} \frac{dw_{xe}}{dx} + \frac{1}{\Delta T} \frac{d\Delta T}{dx} \right) \quad (10)$$

Здесь $\delta_T^{**} = \int_0^{\infty} \frac{w_x}{w_{xe}} \left(1 - \frac{T - T_{cr}}{T_e - T_{cr}}\right) dy$ носит название **толщины потери энергии.**

Поскольку при выводе интегральных соотношений не закладывается каких-либо гипотез о характере движения жидкости (ламинарный или турбулентный), полученные соотношения остаются справедливы и в том и в другом случае.

2. ХАРАКТЕР ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ

Как мы уже отмечали на предыдущих лекциях при обтекании газом (жидкостью) поверхностей (в том числе и плоской пластины), на начальном участке поверхности, образуется **ламинарный пограничный слой**, толщина которого увеличивается. По мере удаления от входной кромки увеличение толщины ламинарного пограничного слоя приводит к уменьшению его устойчивости и происходит переход к **турбулентному режиму течения**.

Переход от ламинарного режима течения в пограничном слое к турбулентному сопровождается увеличением интенсивности теплоотдачи.

Ламинарно-турбулентный переход происходит при **критическом значении числа Рейнольдса**. Опыт и теоретические исследования показывают, что для тонкой плоской пластины:

$$Re_{кр} = \frac{\rho_e w_{xe} X_{кр}}{\mu_e} \approx 2...5 \cdot 10^5 \quad (11)$$

Для круглой гладкой трубы:

$$Re_{кр} = \frac{\rho_e w_{xe} d}{\mu_e} \approx 2...10 \cdot 10^4 \quad (12)$$

Как видно из приведённых соотношений (11) и (12) критическое число Рейнольдса для геометрически различных систем может существенно отличаться. Это связано с тем, что для определения числа Рейнольдса необходимо выбрать характерный геометрический размер системы (длина пластины, диаметр трубы), который, вообще говоря, не связан с динамикой течения.

В качестве характерного геометрического размера системы можно выбрать и полученную нами величину δ^{**} - толщину потери импульса, которая напрямую зависит от распределения скорости потока по толщине пограничного слоя. В этом случае можно получить:

$$Re_{кр}^{**} = \frac{\rho_e w_{xe} \delta^{**}}{\mu_e} \approx 330...360 \quad (13)$$

В этом случае критическое число Рейнольдса будет практически одинаковым для геометрически различных систем.

3. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Теплоотдачу от пластины, омываемой свободным потоком жидкости (градиент давления вдоль пластины равен нулю), при ламинарном режиме течения в пограничном слое можно рассчитать на основе теории динамического пограничного слоя с использованием интегрального уравнения движения. Рассматриваемый метод носит название метода **Кармана - Польгаузена**. Все теплофизические свойства теплоносителя считаются независимыми от температуры. Параметры на внешней границе пограничного слоя обозначим индексом 0.

Зададим форму профиля скоростей в пограничном слое степенным многочленом:

$$\frac{w_x}{w_{x0}} = a_0 + a_1 \frac{y}{\delta} + a_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (14)$$

Для оценки коэффициентов многочлена $a_0 \dots a_3$ воспользуемся граничными условиями:

на стенке $y = 0$:

$w_x = 0$ - выполняется гипотеза прилипания (справедлива для плотных газов $\frac{L}{\lambda_{cb}} < 0.01$).

$\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0$ - следует из уравнения движения в приближении пограничного слоя:

$$\cancel{w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}} + \cancel{w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} - \cancel{\frac{dP}{dx}}$$

на внешней границе пограничного слоя $y = \delta$:

$w_x = w_{x0}$ - заданная скорость набегающего потока.

$\frac{\partial w_x}{\partial y} = 0$ - условие гладкости сопряжения скорости потока внутри пограничного слоя и во внешнем течении.

Используя указанные граничные условия значения коэффициентов уравнения (14) можно получить в следующем виде:

$$a_0 = 0; \quad a_1 = 3/2; \quad a_2 = 0; \quad a_3 = -1/2, \quad (15)$$

а распределение продольной скорости потока по толщине пограничного слоя в виде:

$$\frac{w_x}{w_{x0}} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \quad (16)$$

Используя определение толщины потери импульса, получим:

$$\delta^{**} = \int_0^{\delta, \infty} \left(\frac{w_x}{w_{x0}} \left(1 - \frac{w_x}{w_{x0}} \right) \right) dy = \boxed{\frac{39}{280} \delta} \quad (17)$$

По закону Ньютона напряжение трения на поверхности пластины можно определить как:

$$\left(\tau_{xy} \right)_{cr} = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \mu \frac{w_{x0}}{\delta} \Rightarrow \frac{c_f}{2} = \frac{\left(\tau_{xy} \right)_{cr}}{\rho_0 w_{x0}^2} = \boxed{\frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho_0 w_{x0} \delta}} \quad (18)$$

Решим интегральное уравнение движения следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta^{**}}{dx} &= \frac{c_f}{2} \\ \frac{39}{280} \frac{d\delta}{dx} &= \frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho_0 w_{x0} \delta}; \text{ разделяем переменные } \delta d\delta = \frac{840}{78} \frac{\mu}{\rho_0 w_{x0}} dx \\ \frac{\delta^2}{2} &= \frac{840}{78} \frac{\mu x}{\rho_0 w_{x0}} + C; \quad C = 0 \quad (\text{при } x = 0 \quad \delta = 0) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\boxed{\delta = 4.64 \sqrt{\frac{\mu x}{\rho_0 w_{x0}}}} \quad \text{или} \quad \boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{\sqrt{Re_x}}}$$

Подставляя полученные соотношения в формулу (18), для коэффициента трения на плоской непроницаемой пластине, обтекаемой безградиентным потоком газа или жидкости, получим:

$$\boxed{\frac{c_f}{2} = \frac{0.323}{\sqrt{Re_x}}} \quad (20)$$

Интересно отметить, что точное решение уравнений динамического пограничного слоя отличается от полученного только коэффициентом, и это отличие составляет менее 3%.

Воспользовавшись подобием процессов теплообмена и трения на плоской пластине для **локального коэффициента теплоотдачи (локального числа Нуссельта)** можно получить:

$$Nu = \frac{c_f}{2} Re_x Pr^n \Rightarrow Nu = 0.323 Re_x^{0.5} Pr^n \quad (21)$$

При обтекании плоской пластины экспериментально и теоретически установлено, что показатель степени при числе Прандтля - $n = 1/3$. С учётом поправки коэффициента из более точного решения Блазиуса окончательно получим:

$$\boxed{Nu = 0.332 Re_x^{0.5} Pr^{1/3}} \quad (22)$$

Средний коэффициент теплоотдачи для пластины длиной L получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \frac{1}{L} \int_0^L \alpha dx \\ \alpha &= 0.332 \lambda Pr^{1/3} \left(\frac{\rho_0 w_{x0}}{\mu} \right)^{0.5} \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \bar{\alpha} &= 0.332 Pr^{1/3} \left(\frac{\rho_0 w_{x0}}{\mu} \right)^{0.5} \frac{\lambda}{L} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} dx; \quad \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2L^{0.5} \\ \bar{\alpha} &= 0.664 Pr^{1/3} \left(\frac{\rho_0 w_{x0} L}{\mu} \right)^{0.5} \frac{\lambda}{L} = \boxed{0.664 Pr^{1/3} Re_L^{0.5} \frac{\lambda}{L}} \end{aligned} \quad (23)$$

Или для **среднего значения числа Нуссельта**:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{Nu} &= \frac{\bar{\alpha} L}{\lambda} = 0.664 Pr^{1/3} Re_L^{0.5} \\ T_{ст} &= \text{const}; \quad T_0 = \text{const} \end{aligned}} \quad (24)$$

Необходимо отметить, что полученное на основе подобия решение задачи теплоотдачи от плоской пластины будет справедливо только при подобных граничных условиях уравнения движения и энергии. В данном случае это означает, что температура, как и скорость газа, на стенке и в набегающем потоке должны быть постоянными по длине пластины.

Однако для тепловой задачи часто задаётся постоянство удельного теплового потока на стенке: $q_{ст} = \text{const}$. В этом случае уравнение теплоотдачи следует использовать в следующем виде:

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{Nu} &= 0.5 Pr^{1/3} Re_L^{0.5} \\ q_{cr} &= \text{const} \end{aligned}} \quad (25)$$

При больших перепадах температур $\Delta T > 300$ град (для газов) по толщине пограничного слоя зависимость теплофизических свойств от температуры учитывается дополнительным множителем в уравнениях (24) и (25):

$$\left(\frac{Pr_0}{Pr_{cr}} \right)^{0.25} \quad (26)$$

4. ТЕПЛОТДАЧА ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Турбулизация пограничного слоя приводит к перераспределению скорости потока по толщине пограничного слоя. При этом профиль скорости становится более заполненным, а градиенты скорости вблизи твёрдой поверхности увеличиваются. Условно можно сказать, что турбулентный поток жидкости ведёт себя так же, как ламинарный с увеличенным коэффициентом вязкости.

При турбулентном течении общее напряжение трения складывается из трения, вызванного молекулярной вязкостью и турбулентного трения вызванного пульсациями скорости жидкости.

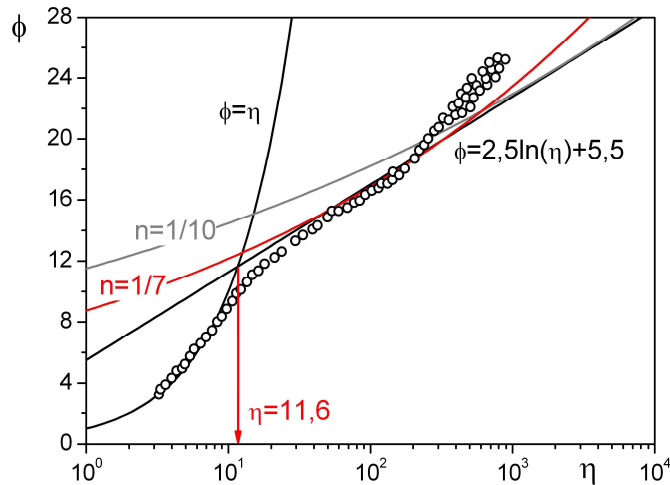
$$\tau_{xy} = (\tau_{xy})_L + (\tau_{xy})_T = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y} + \mu_T \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (27)$$

Опыт показывает, что условно турбулентный пограничный слой можно разделить на две области.

Ламинарный подслой - это область, непосредственно прилегающая к поверхности пластины, характеризуется сильными градиентами скорости потока, большими напряжениями, вызванными молекулярной вязкостью и слабым пульсационным движением среды. Пульсации гасятся при приближении к твёрдой поверхности. В этой области $\mu \gg \mu_T$. Толщина ламинарного подслоя обычно не превышает 1-2% от толщины всего пограничного слоя.

Турбулентное ядро – это область течения над ламинарным подслоем характеризуется развитым пульсационным движением среды. В этой области $\mu_T \gg \mu$.

При турбулентном режиме течения в пограничных слоях, формирующихся на поверхностях различной геометрии, экспериментально было получено, так называемое, **универсальное логарифмическое распределение скорости**.



По оси абсцисс отложено безразмерное расстояние от стенки $\eta = \frac{\rho w_{x0} y}{\mu} \sqrt{\frac{c_f}{2}}$,

а по оси ординат безразмерная скорость потока вдоль поверхности $\varphi = \frac{w_x}{w_{x0}} \sqrt{\frac{2}{c_f}}$.

Из опыта известно, что в **ламинарном подслое** напряжение трения остаётся постоянным по всей высоте, а распределение скоростей хорошо описывается **линейным законом** и может быть представлено в виде:

$$\tau = \mu \frac{dw_x}{dy} = \tau_{ct} \Rightarrow \frac{w_x}{w_{x0}} = \text{Re}_\delta \frac{c_f}{2} \frac{y}{\delta} \Rightarrow \varphi = \eta, \quad (28)$$

где: $\text{Re}_\delta = \rho w_{x0} \delta / \mu$.

Из представленного выражения (28) следует, что:

$$\boxed{\frac{c_f}{2} = \frac{1}{\text{Re}_\delta} \frac{w_x}{w_{x0}} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{-1}} \quad (29)$$

Полученное выражение показывает, что коэффициент трения может быть определён, если известно, хотя бы, одно значение безразмерной скорости w_x/w_{x0} и безразмерной координаты y/δ внутри ламинарного подслоя.

Это значение можно получить, используя распределение скорости потока на границе ламинарного подслоя и турбулентного ядра.

Распределение скорости в **турбулентном ядре** пограничного слоя удовлетворительно описывается степенным законом:

$$\frac{w_x}{w_{x0}} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^n, \quad (30)$$

Для точки пересечения профилей (28) и (30) можно записать:

$$\boxed{\frac{c_f}{2} = \frac{\xi_1^{n-1}}{\text{Re}_\delta}}, \quad (31)$$

где: $\xi_1 = y_1/\delta$ - безразмерное расстояние до границы ламинарного подслоя.

Для границы ламинарного подслоя известно, что независимо от геометрии течения:

$$\eta_1 = \xi_1 \frac{\rho u_0 \delta}{\mu} \sqrt{\frac{c_f}{2}} = \xi_1 \text{Re}_\delta \sqrt{\frac{c_f}{2}} = \text{const} \approx 11,6. \quad (32)$$

Обозначим эту константу C , тогда:

$$\frac{c_f}{2} = \left(\frac{1}{C^{1-n} \text{Re}_\delta^n} \right)^{\frac{2}{n+1}} \text{ или } \boxed{\frac{c_f}{2} = \left(\frac{1}{C_n \text{Re}_\delta^n} \right)^{\frac{2}{n+1}}} \quad (33)$$

Показатель степени n и константа C_n , для различных диапазонов изменения числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса, определены следующим образом:

	n	C_n	
$\text{Re}^{**} < 10^4$	1/7	8.74	(34)
$10^4 < \text{Re}^{**} < 10^6$	1/10	11.5	

Исходя из степенного закона распределения скорости в турбулентном ядре пограничного слоя можно показать, что:

$$\boxed{\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{n}{(1+n)(1+2n)}} \quad (35)$$

Как и в предыдущем параграфе, для пластины омываемой безградиентным потоком жидкости, физические свойства которой не зависят от температуры, расчет теплоотдачи можно выполнить на основе интегрального уравнения движения (9). Для этого достаточно использовать соотношения (33) и (35).

$$\begin{aligned} \frac{d\delta^{**}}{dx} &= \frac{c_f}{2} \\ \frac{n}{(1+n)(1+2n)} \frac{d\delta}{dx} &= \left(\frac{1}{C_n} \right)^{\frac{2}{1+n}} \left(\frac{\mu}{\rho_0 w_{x0} \delta} \right)^{\frac{2n}{1+n}}; \text{ разделяем переменные} \\ \delta^{\frac{2n}{1+n}} d\delta &= \frac{(1+n)(1+2n)}{n} \left(\frac{1}{C_n} \right)^{\frac{2}{1+n}} \left(\frac{\mu}{\rho_0 w_{x0}} \right)^{\frac{2n}{1+n}} dx; \\ \delta^{\frac{3n+1}{1+n}} &= \frac{(3n+1)(1+2n)}{n} \left(\frac{1}{C_n} \right)^{\frac{2}{1+n}} \left(\frac{\mu}{\rho_0 w_{x0}} \right)^{\frac{2n}{1+n}} x + C; C=0 \text{ (при } x=0 \text{ } \delta=0) \\ \delta &= \underbrace{\left(\frac{(3n+1)(2n+1)}{n} \right)^{\frac{1+n}{3n+1}} \left(\frac{1}{C_n} \right)^{\frac{2}{3n+1}} \left(\frac{\mu}{\rho_0 w_{x0}} \right)^{\frac{2n}{3n+1}}}_{A} \frac{x^{\frac{1+n}{3n+1}}}{x} \quad (36) \\ \boxed{\frac{\delta}{x} &= A \text{Re}_x^{-\left(\frac{2n}{3n+1}\right)}} \end{aligned}$$

При $n=1/7$; $C_n=8.74$; $\frac{2n}{3n+1}=0.2$; $\frac{1+n}{3n+1}=0.8$; $\frac{2}{3n+1}=1.4$; $A=0.37$:

$$\frac{\delta}{x} = 0.37 \operatorname{Re}_x^{-0.2} \quad (37)$$

Подставляя полученное соотношение в формулу (33), для коэффициента трения на плоской непроницаемой пластине, обтекаемой безградиентным потоком газа или жидкости, получим:

$$\frac{c_f}{2} = 0.0288 \cdot \operatorname{Re}_x^{-0.2} \quad (38)$$

Воспользовавшись подобием процессов теплообмена и трения на плоской пластине для **локального коэффициента теплоотдачи (локального числа Нуссельта)** можно получить:

$$\operatorname{Nu} = 0.0288 \operatorname{Re}_x^{0.8} \operatorname{Pr}^{0.4} \quad (39)$$

При обтекании плоской пластины экспериментально установлено, что показатель степени при числе Прандтля - $n = 0.4$. **Средний коэффициент теплоотдачи** для пластины длиной L можно рассчитать следующим образом:

$$\overline{\operatorname{Nu}} = 0.037 \operatorname{Re}_L^{0.8} \operatorname{Pr}^{0.4} \quad (40)$$

Экспериментальные исследования местных коэффициентов теплоотдачи позволили получить формулу близкую к теоретической (39):

$$\operatorname{Nu} = 0.0296 \operatorname{Re}_x^{0.8} \operatorname{Pr}_0^{0.43} \left(\frac{\operatorname{Pr}_0}{\operatorname{Pr}_{\text{ст}}} \right)^{0.25} \quad (41)$$